I De la note à l'intervalle

Une note de musique est définie par sa fréquence fondamentale et ses harmoniques. Mais le plus souvent, **plusieurs notes** sont jouées en même temps. On ne va s'intéresser qu'à leur fréquence fondamentale.

La légende raconte que le mathématicien grec Pythagore, passant près d'une forge, entendit plusieurs marteaux émettre des sons différents en frappant la même enclume.
Certaines combinaisons de sons étaient harmonieuses, d'autres moins.
Intrigué, Pythagore examina les marteaux et se rendit compte que deux sons étaient harmonieux lorsque les masses des deux marteaux étaient dans un rapport simple de nombres entiers. Ce mathématicien et philosophe a été convaincu tout au long de sa vie que la Nature était intégralement régie par des rapports de nombres.

La perception simultanée de plusieurs notes peut donner l'impression que les notes « …………………………………………… », on dit qu'elles sont ………………………… ou qu'elles ne « ……………………………………………… », on dit qu'elles sont …………………………… En fait, ………………………………………………………………………………………………………

En musique, un ……………………………………………… de fréquences fondamentales respectives f_1 et f_2 est défini par le ………………………………………………

Chaque intervalle (rapport de fréquences) à un nom selon sa valeur (voir tableau page suivante).
Attention ! Ce terme prête à confusion. Le mot « intervalle » n'a pas le même sens ici qu'en Mathématiques. En musique, un intervalle est un nombre réel strictement positif.

Certains intervalles « sonnent bien », ils sont consonants. C'est le cas de la …………… et de l'…………………

……………………………………………………………………………………………………

Le rapport entre les fréquences des deux sons vaut donc : ou encore

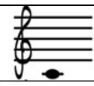
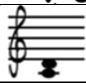
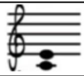
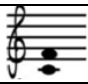
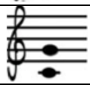
Ces deux sons correspondent à une ……………………………………………………………………

Exemple : La note La de l'octave 3 notée La_3, de fréquence 440 Hz et la note La de l'octave 4 notée La_4, de fréquence ………………… sont séparées d'une octave. La fréquence du La_4 est ……………………… de la fréquence du La_3. Ces deux notes jouées simultanément semblent n'en faire qu'une seule.

……………………………………………………………………………………………………

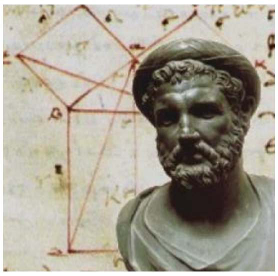
Le rapport entre les fréquences des deux sons vaut donc : ou encore

Remarque : Dans l'antiquité, on ne connaissait pas les fréquences. Cependant, la fréquence est inversement proportionnelle à la longueur d'une corde.
On utilisait donc un instrument à une seule corde appelé un monocorde.

Nombre de degrés de l'intervalle	Nom de l'intervalle	Rapport des fréquences fondamentales	Exemples	Nombre de notes de la 1ère à la dernière
1				1 note
2			 Do^3 – Ré^3	Do – Ré 2 notes
3			 Do^3 – Mi^3	Do – Ré – Mi 3 notes
4			 Do^3 – Fa^3	Do – Ré – Mi – Fa 4 notes
5			 Do^3 – Sol^3	Do – Ré – Mi – Fa – Sol 5 notes
6			 Do^3 – La^3	Do – Ré – Mi – Fa – Sol – La 6 notes
7			 Do^3 – Si^3	Do – Ré – Mi – Fa – Sol – La – Si 7 notes
8			 Do^3 – Do^4	Do – Ré – Mi – Fa – Sol – La – Si – Do 8 notes

II Construction de la gamme de Pythagore

1) Qu'est-ce qu'une gamme ?



Pour écrire une musique agréable à l'oreille, on a besoin ……………………………………
……………………………………………………………

Une gamme est une ………………………………………………………………………

Une gamme peut ainsi être vue comme une échelle avec des barreaux espacés d'une certaine manière, chaque barreau représentant …………………… et l'espace entre deux barreaux quelconques, représentant …………………………………………

Dans l'Antiquité, la construction des gammes était basée sur des …………………………………… **(2/1, 3/2, 4/3, etc.). En effet, des sons dont les fréquences sont dans ces rapports simples étaient alors considérés comme** ……………………………………………………………

La ………………………………………… **(ou gamme naturelle) est une** ………………………………………… ………………………………………………… **Elle est basée sur le** …………………………………………… **, avec un** ………………………………………………

On démarre par exemple de la note Do de la première octave notée Do$_1$ de fréquence f_0 = 65,4 Hz pour calculer la gamme naturelle.

La fréquence suivante notée f_1 est telle que : c'est-à-dire : f_1 =

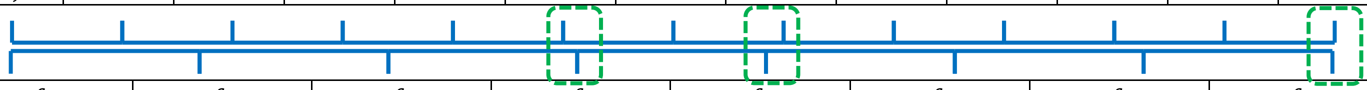
La fréquence suivante notée f_2 est telle que : c'est-à-dire : f_2 =

Après plusieurs fréquences obtenues par le **cycle des quintes**, voyons s'il est possible de ……………………… ……………………………………………… , d'une fréquence 2 fois plus grande que celle du Do précédent.

Cycle des quintes, puis cycle des octaves :

$\times\frac{3}{2}$ $\times\frac{3}{2}$ $\times\frac{3}{2}$ $\times\frac{3}{2}$ $\times\frac{3}{2}$ $\times\frac{3}{2}$ $\times\frac{3}{2}$ $\times\frac{3}{2}$ $\times\frac{3}{2}$ $\times\frac{3}{2}$ $\times\frac{3}{2}$ $\times\frac{3}{2}$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
65,4												



f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
65,4							

× 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2

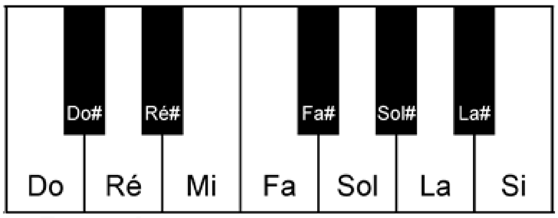
Pour des raisons mathématiques, ce cycle des quintes ne « …………………» jamais parfaitement sur la note de départ. Comme l'intervalle entre deux notes d'une quinte est une puissance de $\frac{3}{2}$, pour que le cycle s'arrête, il faudrait retomber sur une octave donc une puissance de 2.
Donc, si on appelle n et p deux nombres entiers non nuls, il faudrait que l'on ait :

Soit : On multiplie de chaque côté par 2^n :

On obtient :
Comme une puissance de 3 (impaire) ne sera jamais égale à une puissance de 2 (paire), l'équation ……..

Pour le cycle à douze quintes et 7 octaves : n = …… et p = ……
3^n = ………………… 2^{p+n} = ……………………… ………………………………

Le ………………………………………………………… , mais au bout de ……………………… , ou de ……………………… , on retrouve presque la même note : le cycle ……………………
……………………………………………………………………
La gamme naturelle (ou gamme de Pythagore) va utiliser cette observation pour fabriquer ………………………………………



On peut aussi remarquer que le cycle semble se refermer, mais dans une moindre mesure, pour 5 quintes successives ou alors 7 quintes. En partant de là, on peut aussi fabriquer une gamme à 5 notes dite « gamme pentatonique » ou à 7 notes dite « gamme diatonique », mais le re-bouclage est imparfait.

2) Construction de la gamme de Pythagore pour la première octave

Pour obtenir une vraie gamme de notes, il faut que les …………………… …………………………………………………………… , c'est-à-dire que leur fréquence soit encadrée par deux fréquences dont la plus grande est ………………………………………

12 notes
Gamme chromatique
ou gamme de Pythagore

Ainsi, pour la première octave qui commence par le Do_1 de fréquence 65,4 Hz, toutes les notes doivent avoir une fréquence comprise entre …………………………………………………
Or, en calculant les fréquences des notes les unes après les autres avec le cycle des quintes, celles-ci dépassent rapidement la limite de 130,8 Hz, puisque f_2 est déjà égal à 147 Hz.

Cependant, puisque les notes de fréquence « double » sont consonantes, car elles correspondent à une même note à deux hauteurs différentes, celles de fréquence « ………………… » le sont aussi !
Autrement dit, ………………………………………………………

Ainsi, si la fréquence calculée dépasse 130,8 Hz, **on la divise par 2 autant de fois qu'il le faut** pour qu'elle finisse comprise entre 65,4 Hz et 130,8 Hz. Cette opération se nomme la ………………………………

On démarre de la note Do_1 de fréquence f_0 = 65,4 Hz pour construire la gamme naturelle.

Première note : f_1 = ……………………………………………

Deuxième note : f_2 = ……………………………………………………………………………………………

Normalisation : f_2 = ……………………………………………

Troisième note : f_3 = ……………………………………………………………………………………………

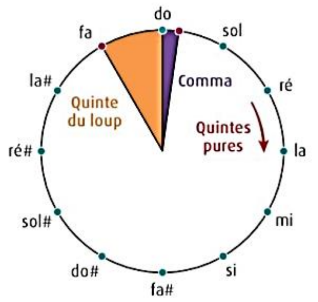
Normalisation : f_3 = …………………………………………… **Ainsi de suite**

$\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$

n° de note	Départ	1ère	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème	7ème	8ème	9ème	10ème	11ème	12ème
Fréquence (Hz)	65,4												
Diviser par 2^n si f > 130,8 Hz			2	2	2^2	2^2	2^3	2^4	2^4	2^5	2^5	2^6	2^6
Fréquence finale	65,4												

Même si la dernière fréquence calculée (133 Hz) est légèrement supérieure à 130,8 Hz, on n'effectue pas de division supplémentaire. Il existe une petite différence (133 – 130,8 = 2,2 Hz) entre la fréquence calculée et la fréquence de l'octave suivant.
De plus, plus on monte dans les octaves, plus ce décalage devient important (près de 8 Hz entre le Do_3 et le Do_4 par exemple).

Dans la gamme de Pythagore, ……………………………………………………………..
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
Ce rétrécissement, appelé …………………… **, rend la** ……………………………
…………………………………… **Pour les musiciens de l'époque, elle semble alors hurler à la manière d'un loup et sera donc baptisée «** ……………………...
………………… **» à cause de l'effet sonore désagréable produit.**



Pour finir l'étape de normalisation, on place les fréquences obtenues pour chaque note dans l'ordre croissant. On obtient ainsi la première octave de la gamme pensée par Pythagore et ses disciples :

Fréquence (Hz)													
Note	Do	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do

III Construction de la gamme tempérée

1) L'intervalle de la gamme tempérée

Les gammes de Pythagore sont restées très longtemps en usage et ont donné les noms des notes que l'on utilise encore aujourd'hui. Elles ont pourtant deux inconvénients majeurs :

- Une des quintes est légèrement fausse (la ……………………………….), ce qui peut produire des …………………………… pour les oreilles averties, et inciter les compositeurs à éviter d'utiliser les notes de cette quinte ensemble (pour ne pas faire entendre cette dissonance) ;

- Lorsqu'on souhaite ……………………………. un morceau, c'est-à-dire le jouer légèrement plus aigu ou plus grave, pour l'adapter par exemple à la tonalité d'un autre instrument que celui pour lequel il est écrit, on est confronté à des problèmes insolubles, car les ……………………………………………… des gammes pythagoriciennes ne sont ……………………………………….

Si on veut une gamme de 12 notes à partir de la note de départ de fréquence fondamentale f_0, ………………
………...
………...

Dans cette nouvelle gamme appelée …………………………………, la quinte du loup disparait mais tous les intervalles sont donc légèrement faux. C'est néanmoins la gamme qui a été choisie pour la pratique de la musique occidentale à partir de XVIII$^{\text{ème}}$ siècle et notre oreille s'y est habituée.

Par définition d'un intervalle, si f_n est la fréquence fondamentale de la note n, alors on doit avoir :

On a donc : f_1 =

f_2 =

f_3 = Ainsi de suite …

On peut donc montrer que :

Si on veut une gamme de 12 notes, il faut que la fréquence de la note n°12 corresponde à celle de l'octave suivant :

On veut donc que : Or on a :

On a donc l'égalité :

Cela donne :

Coin des Maths :

Soit a un nombre réel positif.

La racine carrée de a est le nombre réel positif qui, élevé à la puissance 2, redonne a. Elle se note $\sqrt{a}$.

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

De la même manière, on définit la racine douzième de a.

La racine douzième de a est le nombre réel positif qui, élevé à la puissance 12, donne a. Elle se note $\sqrt[12]{a}$ ou $a^{\frac{1}{12}}$.

$$(\sqrt[12]{a})^{12} = a$$

On obtient donc :

Remarque : $\sqrt[12]{2}$ se lit : « racine douzième de 2 ». Elle se calcule sur la calculatrice en tapant : « 2^(1/12) ». Il se note $\sqrt[12]{2}$ ou $2^{\frac{1}{12}}$.

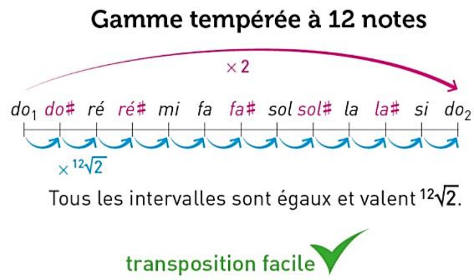
C'est un nombre ………………………………… , c'est-à-dire qu'il est impossible de le mettre sous la forme d'une fraction de nombres entiers.

……
……
……
……

2) Construction de la gamme tempérée pour la première octave

On démarre par exemple de la note Do$_1$ de fréquence f_0 = 65,4 Hz. On calcule les fréquences des notes suivantes en multipliant chaque fréquence par $\sqrt[12]{2}$, avec la relation : ……………………………………

Numéro de note	Calcul de la fréquence	Note correspondante
Note de départ	f_0 = **65,4 Hz**	Do
Première note	$f_1 \; = \;$ …………………………………………	Do#
Deuxième note	$f_2 \; = \;$ ……………………… $f_2 \; = \;$ ………………………………………	Ré
Troisième note	$f_3 \; = \; (\sqrt[12]{2})^3 \times f_0$ $f_3 \; = \; (\sqrt[12]{2})^3 \times 65{,}4 \; = \;$ ……………………	Ré#
Quatrième note	$f_4 \; = \; (\sqrt[12]{2})^4 \times f_0$ $f_4 \; = \; (\sqrt[12]{2})^4 \times 65{,}4 \; = \;$ ……………………	Mi
Cinquième note	$f_5 \; = \; (\sqrt[12]{2})^5 \times f_0$ $f_5 \; = \; (\sqrt[12]{2})^5 \times 65{,}4 \; = \;$ ……………………	Fa
Sixième note	$f_6 \; = \; (\sqrt[12]{2})^6 \times f_0$ $f_6 \; = \; (\sqrt[12]{2})^6 \times 65{,}4 \; = \;$ ……………………	Fa#
Septième note	$f_7 \; = \; (\sqrt[12]{2})^7 \times f_0$ $f_7 \; = \; (\sqrt[12]{2})^7 \times 65{,}4 \; = \;$ ……………………	Sol
Huitième note	$f_8 \; = \; (\sqrt[12]{2})^8 \times f_0$ $f_8 \; = \; (\sqrt[12]{2})^8 \times 65{,}4 \; = \;$ ……………………	Sol#
Neuvième note	$f_9 \; = \; (\sqrt[12]{2})^9 \times f_0$ $f_9 \; = \; (\sqrt[12]{2})^9 \times 65{,}4 \; = \;$ ……………………	La
Dixième note	$f_{10} \; = \; (\sqrt[12]{2})^{10} \times f_0$ $f_{10} \; = \; (\sqrt[12]{2})^{10} \times 65{,}4 \; = \;$ ……………………	La#
Onzième note	$f_{11} \; = \; (\sqrt[12]{2})^{11} \times f_0$ $f_{11} \; = \; (\sqrt[12]{2})^{11} \times 65{,}4 \; = \;$ ……………………	Si
Douzième note	$f_{12} \; = \; (\sqrt[12]{2})^{12} \times f_0 \; = \; 2 \times f_0$! $f_{12} \; = \; (\sqrt[12]{2})^{12} \times 65{,}4 \; = \;$ ……………………	Do



Remarque : La gamme tempérée est celle présente sur le piano, pour lequel deux touches successives (blanche ou noire) sont séparées par un demi-ton.

Exercice :

La note donnée par ce diapason a pour fréquence 440 Hz. On l'appelle La_3.

1) Calculer la fréquence de la note La située une octave au-dessus du La_3, que l'on nomme La_4.

……

……

2) Calculer la fréquence du La_1, situé deux octaves au-dessous du La_3.

………………………………………………………………………………………………

3) L'intervalle La_3-Mi_4 est une quinte ascendante. Quelle est la fréquence du Mi_4 dans la gamme de Pythagore ?

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………