I De la note à l'intervalle

Une note de musique est définie par sa fréquence fondamentale et ses harmoniques. Mais le plus souvent, **plusieurs notes** sont jouées en même temps. On ne va s'intéresser qu'à leur fréquence fondamentale.

La légende raconte que le mathématicien grec Pythagore, passant près d'une forge, entendit plusieurs marteaux émettre des sons différents en frappant la même enclume.
Certaines combinaisons de sons étaient harmonieuses, d'autres moins.
Intrigué, Pythagore examina les marteaux et se rendit compte que deux sons étaient harmonieux lorsque les masses des deux marteaux étaient dans un rapport simple de nombres entiers. Ce mathématicien et philosophe a été convaincu tout au long de sa vie que la Nature était intégralement régie par des rapports de nombres.

La perception simultanée de plusieurs notes peut donner l'impression que les notes « sonnent bien ensemble », on dit qu'elles sont **consonantes** ou qu'elles ne « sonnent pas ensemble », on dit qu'elles sont **dissonantes**. En fait, notre oreille est sensible **au rapport des fréquences de deux notes**.

En musique, un intervalle entre deux sons de fréquences fondamentales respectives f_1 et f_2 est défini par le rapport de leur fréquence $\frac{f_2}{f_1}$.

Chaque intervalle (rapport de fréquences) à un nom selon sa valeur (voir tableau page suivante).
Attention ! Ce terme prête à confusion. Le mot « intervalle » n'a pas le même sens ici qu'en Mathématiques. En musique, un intervalle est un nombre réel strictement positif.

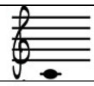
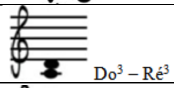
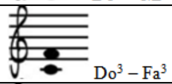
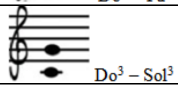
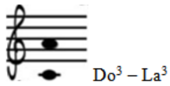
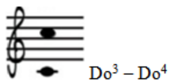
Certains intervalles « sonnent bien », ils sont consonants. C'est le cas de la **quinte** et de l'**octave**.

Une octave est un intervalle entre deux sons égal à 2. Le rapport entre les fréquences des deux sons vaut donc : $\frac{f_2}{f_1} = \frac{2}{1}$ **ou encore** $f_2 = 2 \times f_1$
Ces deux sons correspondent à une même note, à deux hauteurs différentes.

Exemple : La note La de l'octave 3 notée La_3, de fréquence 440 Hz et la note La de l'octave 4 notée La_4, de fréquence 880 Hz sont séparées d'une octave. La fréquence du La_4 est le double de la fréquence du La_3. Ces deux notes jouées simultanément semblent n'en faire qu'une seule.

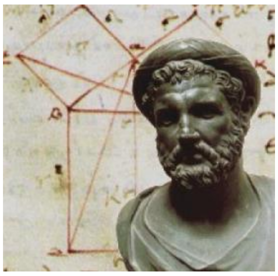
Une quinte est un intervalle entre deux sons égal à $\frac{3}{2}$. Le rapport entre les fréquences des deux sons vaut donc : $\frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}$ **ou encore** $f_2 = \frac{3}{2} \times f_1$

Remarque : Dans l'antiquité, on ne connaissait pas les fréquences. Cependant, la fréquence est inversement proportionnelle à la longueur d'une corde.
On utilisait donc un instrument à une seule corde appelé un monocorde.

Nombre de degrés de l'intervalle	Nom de l'intervalle	Rapport des fréquences fondamentales	Exemples	Nombre de notes de la 1ère à la dernière
1	Unisson	$\frac{1}{1}$		1 note
2	Seconde	$\frac{9}{8}$		Do – Ré 2 notes
3	Tierce	$\frac{5}{4}$		Do – Ré – Mi 3 notes
4	Quarte	$\frac{4}{3}$		Do – Ré – Mi – Fa 4 notes
5	Quinte	$\frac{3}{2}$		Do – Ré – Mi – Fa – Sol 5 notes
6	Sixte	$\frac{8}{5}$		Do – Ré – Mi – Fa – Sol – La 6 notes
7	Septième	$\frac{15}{8}$		Do – Ré – Mi – Fa – Sol – La – Si 7 notes
8	Octave	$\frac{2}{1}$		Do – Ré – Mi – Fa – Sol – La – Si – Do 8 notes

II Construction de la gamme de Pythagore

1) Qu'est-ce qu'une gamme ?



Pour écrire une musique agréable à l'oreille, on a besoin d'un ensemble de notes qui peuvent s'harmoniser : une gamme.

Une gamme est une suite finie de notes réparties sur une octave.

Une gamme peut ainsi être vue comme une échelle avec des barreaux espacés d'une certaine manière, chaque barreau représentant une note et l'espace entre deux barreaux quelconques, représentant un intervalle musical.

Dans l'Antiquité, la construction des gammes était basée sur des fractions simples (2/1, 3/2, 4/3, etc.). En effet, des sons dont les fréquences sont dans ces rapports simples étaient alors considérés comme les seuls à être consonants.

La gamme de Pythagore (ou gamme naturelle) est une suite de notes progressant de quinte en quinte. Elle est basée sur le cycle des quintes, avec un rapport des fréquences de $\frac{3}{2}$.

On démarre par exemple de la note Do de la première octave notée Do$_1$ de fréquence f_0 = 65,4 Hz pour calculer la gamme naturelle.

La fréquence suivante notée f_1 est telle que : $\frac{f_1}{f_0} = \frac{3}{2}$, c'est-à-dire : $f_1 = \frac{3}{2} \times f_0 = \frac{3}{2} \times 65{,}4 = 98{,}1$ Hz.

La fréquence suivante notée f_2 est telle que : $\frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}$, c'est-à-dire : $f_2 = \frac{3}{2} \times f_1 = \frac{3}{2} \times 98{,}1 = 147$ Hz.

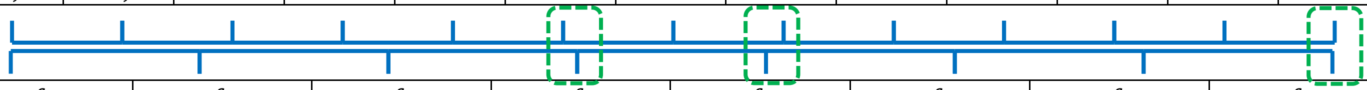
Et ainsi de suite.

Après plusieurs fréquences obtenues par le **cycle des quintes**, voyons s'il est possible de **retomber sur la note Do d'une octave supérieure**, d'une fréquence 2 fois plus grande que celle du Do précédent.

Cycle des quintes, puis cycle des octaves :

$\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}
65,4	98,1	147	221	331	497	745	1 117	1 676	2 514	3 771	5 657	8 485



f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
65,4	131	262	523	1 046	2 093	4 186	8 371

× 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2

Pour des raisons mathématiques, ce cycle des quintes ne « reboucle » jamais parfaitement sur la note de départ. Comme l'intervalle entre deux notes d'une quinte est une puissance de $\frac{3}{2}$, pour que le cycle s'arrête, il faudrait retomber sur une octave donc une puissance de 2.

Donc, si on appelle *n* et *p* deux nombres entiers non nuls, il faudrait que l'on ait : $\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^p$.

Soit : $\frac{3^n}{2^n} = 2^p$ On multiplie de chaque côté par 2^n : $\frac{3^n}{\cancel{2^n}} \times \cancel{2^n} = 2^p \times 2^n$

On obtient : $3^n = 2^p \times 2^n = 2^{p+n}$

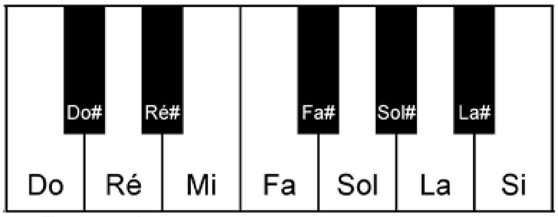
Comme une puissance de 3 (impaire) ne sera jamais égale à une puissance de 2 (paire), l'équation $3^n = 2^{p+n}$ n'a pas de solution. **Le cycle des quintes est donc infini**.

Pour le cycle à douze quintes et 7 octaves : n = 12 et p = 7

$3^n = 3^{12} = 531\,441$ $2^{p+n} = 2^{7+12} = 2^{19} = 524\,288$ C'est presque égal !

Le cycle des quintes est donc infini, mais au bout de 12 quintes, ou de 7 octaves, on retrouve presque la même note : le cycle semble se refermer, sans retomber exactement sur l'octave.

La gamme naturelle (ou gamme de Pythagore) va utiliser cette observation pour fabriquer 12 notes dans une octave.



On peut aussi remarquer que le cycle semble se refermer, mais dans une moindre mesure, pour 5 quintes successives ou alors 7 quintes. En partant de là, on peut aussi fabriquer une gamme à 5 notes dite « gamme pentatonique » ou à 7 notes dite « gamme diatonique », mais le re-bouclage est imparfait.

2) Construction de la gamme de Pythagore pour la première octave

Pour obtenir une vraie gamme de notes, il faut que les **12 notes soient dans la même octave**, c'est-à-dire que leur fréquence soit encadrée par deux fréquences dont la plus grande est le double de la première.

12 notes
Gamme chromatique
ou gamme de Pythagore

Ainsi, pour la première octave qui commence par le Do_1 de fréquence 65,4 Hz, toutes les notes doivent avoir une fréquence comprise entre 65,4 Hz et 130,8 Hz (= 2 × 65,4).
Or, en calculant les fréquences des notes les unes après les autres avec le cycle des quintes, celles-ci dépassent rapidement la limite de 130,8 Hz, puisque f_2 est déjà égal à 147 Hz.

Cependant, puisque les notes de fréquence « double » sont consonantes, car elles correspondent à une même note à deux hauteurs différentes, celles de fréquence « moitié » le sont aussi ! Autrement dit, les notes de fréquence $\frac{f_1}{2}$ et f_1 sont consonantes.
Ainsi, si la fréquence calculée dépasse 130,8 Hz, **on la divise par 2 autant de fois qu'il le faut** pour qu'elle finisse comprise entre 65,4 Hz et 130,8 Hz. Cette opération se nomme la **normalisation**.

On démarre de la note Do₁ de fréquence $f_0 = 65{,}4$ Hz pour construire la gamme naturelle.

Première note : $f_1 = \frac{3}{2} \times f_0 = \frac{3}{2} \times 65{,}4 = \mathbf{98{,}1\ Hz}$

Deuxième note : $f_2 = \frac{3}{2} \times f_1 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times f_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\color{red}2} \times f_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 65{,}4 = 147$ Hz

Normalisation : $f_2 = \frac{147}{2} = \mathbf{73{,}6\ Hz}$

Troisième note : $f_3 = \frac{3}{2} \times f_2 = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times f_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\color{red}3} \times f_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \times 65{,}4 = 221$ Hz

Normalisation : $f_3 = \frac{221}{2} = \mathbf{110\ Hz}$ **Ainsi de suite**

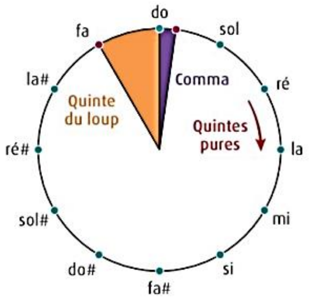
$\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$ $\times \frac{3}{2}$

n° de note	Départ	1ère	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème	7ème	8ème	9ème	10ème	11ème	12ème
Fréquence (Hz)	65,4	98,1	147	221	331	497	745	1 117	1 676	2 514	3 771	5 657	8 485
Diviser par 2^n si $f > 130{,}8$ Hz			2	2	2^2	2^2	2^3	2^4	2^4	2^5	2^5	2^6	2^6
Fréquence finale	65,4	98,1	73,6	110	82,8	124	93,1	69,8	105	78,6	118	88,4	~~133~~ 130,8

Même si la dernière fréquence calculée (133 Hz) est légèrement supérieure à 130,8 Hz, on n'effectue pas de division supplémentaire. Il existe une petite différence (133 – 130,8 = 2,2 Hz) entre la fréquence calculée et la fréquence de l'octave suivant.
De plus, plus on monte dans les octaves, plus ce décalage devient important (près de 8 Hz entre le Do₃ et le Do₄ par exemple).

Dans la gamme de Pythagore, les quintes et les octaves ne coïncident pas exactement, on raccourcit la douzième quinte du cycle de chaque octave pour se raccorder à l'octave suivant.

Ce rétrécissement, appelé le comma, rend la dernière quinte très dissonante. Pour les musiciens de l'époque, elle semble alors hurler à la manière d'un loup et sera donc baptisée « quinte du loup » à cause de l'effet sonore désagréable produit.



Pour finir l'étape de normalisation, on place les fréquences obtenues pour chaque note dans l'ordre croissant. On obtient ainsi la première octave de la gamme pensée par Pythagore et ses disciples :

Fréquence (Hz)	65,4	69,8	73,6	78,6	82,8	88,4	93,1	98,1	105	110	118	124	~~133~~ 130,8
Note	Do	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do

III Construction de la gamme tempérée

1) L'intervalle de la gamme tempérée

Les gammes de Pythagore sont restées très longtemps en usage et ont donné les noms des notes que l'on utilise encore aujourd'hui. Elles ont pourtant deux inconvénients majeurs :

- Une des quintes est légèrement fausse (la **quinte du loup**), ce qui peut produire des dissonances pour les oreilles averties, et inciter les compositeurs à éviter d'utiliser les notes de cette quinte ensemble (pour ne pas faire entendre cette dissonance) ;

- Lorsqu'on souhaite **transposer** un morceau, c'est-à-dire le jouer légèrement plus aigu ou plus grave, pour l'adapter par exemple à la tonalité d'un autre instrument que celui pour lequel il est écrit, on est confronté à des problèmes insolubles, car les intervalles entre les notes des gammes pythagoriciennes ne sont pas tous égaux.

Si on veut une gamme de 12 notes à partir de la note de départ de fréquence fondamentale f_0, on divise l'octave de f_0 en 12 intervalles parfaitement égaux appelés « demi-tons » et notés r.

Dans cette nouvelle gamme appelée **gamme tempérée**, la quinte du loup disparait mais tous les intervalles sont donc légèrement faux. C'est néanmoins la gamme qui a été choisie pour la pratique de la musique occidentale à partir de XVIII$^{\text{ème}}$ siècle et notre oreille s'y est habituée.

Par définition d'un intervalle, si f_n est la fréquence fondamentale de la note n, alors on doit avoir : $\frac{f_n}{f_{n-1}} = r$.

On a donc : $f_1 = r \times f_0$

$f_2 = r \times f_1 = r \times r \times f_0 = r^2 \times f_0$

$f_3 = r \times f_2 = r \times r^2 \times f_0 = r^3 \times f_0$ Ainsi de suite…

On peut donc montrer que : $$f_n = r^n \times f_0$$

Si on veut une gamme de 12 notes, il faut que la fréquence de la note n°12 corresponde à celle de l'octave suivant :

On veut donc que : $f_{12} = 2 \times f_0$ Or on a : $f_{12} = r^{12} \times f_0$

On a donc l'égalité : $r^{12} \times \cancel{f_0} = 2 \times \cancel{f_0}$

Cela donne : $r^{12} = 2$

Coin des Maths :

Soit a un nombre réel positif.

La racine carrée de a est le nombre réel positif qui, élevé à la puissance 2, redonne a. Elle se note $\sqrt{a}$.

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

De la même manière, on définit la racine douzième de a.

La racine douzième de a est le nombre réel positif qui, élevé à la puissance 12, donne a. Elle se note $\sqrt[12]{a}$ ou $a^{\frac{1}{12}}$. $(\sqrt[12]{a})^{12} = a$

On obtient donc : $$\boxed{r = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}0595\ldots}$$

Remarque : $\sqrt[12]{2}$ se lit : « racine douzième de 2 ». Elle se calcule sur la calculatrice en tapant : « 2^(1/12) ». Il se note $\sqrt[12]{2}$ ou $2^{\frac{1}{12}}$.

C'est un nombre irrationnel, c'est-à-dire qu'il est impossible de le mettre sous la forme d'une fraction de nombres entiers.

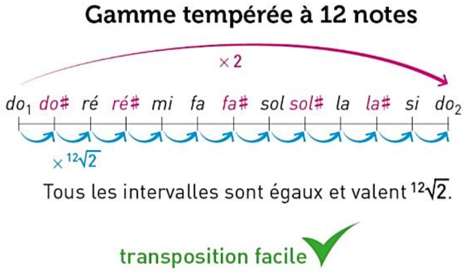
On peut ainsi construire la gamme tempérée où tous les intervalles entre deux notes successives sont égaux à la racine douzième de 2 : $\sqrt[12]{2}$.

La connaissance des nombres irrationnels a permis, au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, de construire des gammes à intervalles égaux.

2) Construction de la gamme tempérée pour la première octave

On démarre par exemple de la note Do$_1$ de fréquence f_0 = 65,4 Hz. On calcule les fréquences des notes suivantes en multipliant chaque fréquence par $\sqrt[12]{2}$, avec la relation : $f_n = (\sqrt[12]{2})^n \times f_0$

Numéro de note	Calcul de la fréquence	Note correspondante
Note de départ	f_0 = **65,4 Hz**	Do
Première note	$f_1 = \sqrt[12]{2} \times f_0 = \sqrt[12]{2} \times 65{,}4 = \mathbf{69{,}3\ Hz}$	Do#
Deuxième note	$f_2 = (\sqrt[12]{2})^2 \times f_0$ $f_2 = (\sqrt[12]{2})^2 \times 65{,}4 = \mathbf{73{,}4\ Hz}$	Ré
Troisième note	$f_3 = (\sqrt[12]{2})^3 \times f_0$ $f_3 = (\sqrt[12]{2})^3 \times 65{,}4 = \mathbf{77{,}8\ Hz}$	Ré#
Quatrième note	$f_4 = (\sqrt[12]{2})^4 \times f_0$ $f_4 = (\sqrt[12]{2})^4 \times 65{,}4 = \mathbf{82{,}4\ Hz}$	Mi
Cinquième note	$f_5 = (\sqrt[12]{2})^5 \times f_0$ $f_5 = (\sqrt[12]{2})^5 \times 65{,}4 = \mathbf{87{,}3\ Hz}$	Fa
Sixième note	$f_6 = (\sqrt[12]{2})^6 \times f_0$ $f_6 = (\sqrt[12]{2})^6 \times 65{,}4 = \mathbf{92{,}5\ Hz}$	Fa#
Septième note	$f_7 = (\sqrt[12]{2})^7 \times f_0$ $f_7 = (\sqrt[12]{2})^7 \times 65{,}4 = \mathbf{98{,}0\ Hz}$	Sol
Huitième note	$f_8 = (\sqrt[12]{2})^8 \times f_0$ $f_8 = (\sqrt[12]{2})^8 \times 65{,}4 = \mathbf{103{,}8\ Hz}$	Sol#
Neuvième note	$f_9 = (\sqrt[12]{2})^9 \times f_0$ $f_9 = (\sqrt[12]{2})^9 \times 65{,}4 = \mathbf{110{,}0\ Hz}$	La
Dixième note	$f_{10} = (\sqrt[12]{2})^{10} \times f_0$ $f_{10} = (\sqrt[12]{2})^{10} \times 65{,}4 = \mathbf{116{,}5\ Hz}$	La#
Onzième note	$f_{11} = (\sqrt[12]{2})^{11} \times f_0$ $f_{11} = (\sqrt[12]{2})^{11} \times 65{,}4 = \mathbf{123{,}4\ Hz}$	Si
Douzième note	$f_{12} = (\sqrt[12]{2})^{12} \times f_0 = 2 \times f_0$! $f_{12} = (\sqrt[12]{2})^{12} \times 65{,}4 = \mathbf{130{,}8\ Hz}$	Do



Remarque : La gamme tempérée est celle présente sur le piano, pour lequel deux touches successives (blanche ou noire) sont séparées par un demi-ton.

Exercice :

La note donnée par ce diapason a pour fréquence 440 Hz. On l'appelle La$_3$.

1) Calculer la fréquence de la note La située une octave au-dessus du La$_3$, que l'on nomme La$_4$.

Dans une octave, le rapport entre les fréquences des deux sons vaut : $\frac{f_2}{f_1} = \frac{2}{1}$. La fréquence du La$_4$ est le double de celle du La$_3$: $f = 440 \times 2 = \underline{880\ Hz}$.

2) Calculer la fréquence du La$_1$, situé deux octaves au-dessous du La$_3$.

La fréquence f du La$_1$ est telle que $4 \times f = 440$, soit $\underline{f = 110\ Hz}$.

3) L'intervalle La$_3$-Mi$_4$ est une quinte ascendante. Quelle est la fréquence du Mi$_4$ dans la gamme de Pythagore ?

Dans une quinte, le rapport entre les fréquences des deux sons vaut : $\frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}$. La fréquence du Mi$_4$ vaut donc : $f = 440 \times \frac{3}{2} = \underline{660\ Hz}$.